分枝マルコフ過程の一応用について (生物モデルの数学)

白尾, 恒吉

数理解析研究所講究録
174巻 1973年 63-100

分枝マルコフ過程の一応用について

都立大 理・数 白尾恒吉

§1. 序

分枝マルコフ過程を通じて，ある種の非線型偏微分方程式が確率論的に解釈されることはよく知られている．標題はその考え方・方法を以下に述べる(1)および(2)に適用するという意味である．我々がここでとりあげるのは次のコーシー問題である．

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P(u)\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ u(0+,x) = f(x) \end{cases}, \qquad t>0,\ x \in R^1,$$

ただし

$$P(u) = \sum_{k=0}^{N} c_k u^k, \qquad c_k \text{ は定数}.$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + P\left(u, \dfrac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad t>0,\ x \in R^1, \\ u(0+,x) = f(x), \end{cases}$$

ただし

$$P\left(u,\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\sum_{\substack{0\leq p\leq N\\ 1\leq q\leq M}} c_{pq}\, u^p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^q, \qquad c_{pq}\text{ は定数.}$$

これらの問題を確率論的に考えるために，最初に（1）および（2）で $\partial u/\partial x$ の項のない場合，すなわち

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+P(u), & t>0,\ x\in R^1, \\ u(0+,x)=f(x), \end{cases}$$

ただし

$$P(u)=\sum_{k=0}^{N} c_k u^k,$$

を考えてみる．（3）と分枝マルコフ過程の関係は既によく知られているが，（1）および（2）の場合も本質的には（3）と同様に扱われる（確率論的立場から）ので簡単に述べることにする．主として方程式に対応するマルコフ過程の構成の説明であるが，大筋を述べるだけであって数学的厳密さを期していないことをお断りしておく．

（3）で $P(u)$ の項がないときは1次元ブラウン運動が対応することはよく知られている．そこで基礎になる運動として1次元ブラウン運動 $\beta(t)$ を考えよう．すなわち点 $x\in R^1$

から出発した粒子の時刻 t における位置 $\beta(t)=\beta(t,\omega)$ が $I\in\mathcal{B}(R^1)$ に属する確率が，(a)

(4) $$P_x(\beta(t)\in I)=\int_I p(t,x,y)\,dy\ ,\quad t\geqq 0,\ I\in\mathcal{B}(R^1),$$

$$\text{ただし}\quad p(t,x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right),$$

で与えられ，(b) $\beta(t)=\beta(t,\omega)$ は確率1で（i.e. P_x-測度0の ω を除いて）t の連続関数，(c) $0\leqq s<t$ のとき偏差 $\beta(t)-\beta(s)$ は時刻 s までの動き $\{\beta(u)\,;\,u\leqq s\}$ とは P_x-測度に関し独立である．

f を R^1 上の有界連続関数とし，$f(\beta(t))$ の P_x-測度による平均値を $u(t,x)$，すなわち

(4) $$u(t,x)=E_x[f(\beta(t))]=\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x,y)f(y)\,dy$$

とすれば，u は明らかに

(5) $$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\qquad u(0+,x)=f(x)$$

の解になっている

さて $c>0$ とし，$\beta(t)$ の e^{-ct} subprocess を考えよう．すなわちブラウン運動の粒子が dt 時間に $c\cdot dt$ の確率で消滅する状態を考える．このとき雑な書き方をすると粒子が時

刻tまで生き残る確率は

$$(1-c\,dt)^{\left[\frac{t}{dt}\right]} \xrightarrow[dt\to 0]{} e^{-ct}$$

である．いまこのような構造のもとで粒子の消滅する時刻を$\sigma(\omega)$とし，$\beta(t,\omega)$の生き残りの部分だけを考えこれを$\beta_0(t)=\beta_0(t,\omega)$と書くことにする．このとき$\beta_0(t)$の生存寿命（消滅時刻）は$\sigma(\omega)$で，$\beta_0(t)$の従う確率法則$P_x^0$は

$$P_x^0(\beta_0(t)\in I)=P_x(\beta(t)\in I,\ \sigma>t)$$

$$=e^{-ct}P_x(\beta(t)\in I),\quad I\in\mathcal{B}(R^1),$$

で与えられる．この$\beta_0(t)$を$\beta(t)$のe^{-ct}-subprocessという．このとき$f(\beta_0(t))$のP_x^0-測度による平均値を$u_0(t,x)$とすれば

$$(6)\qquad u_0(t,x)=E_x^0[f(\beta_0(t))]=e^{-ct}u(t,x)$$

は

$$(7)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-cu,\quad u(0+,x)=f(x)$$

の解である．

さて（3）に戻ろう．場合を3つに分けて考えることにする．

(I) $c_k > 0\ (k \neq 1)$, $c_1 = -\sum_{k \neq 1} c_k$ のとき.

$c = -c_1 (>0)$とおき, $\beta(t)$ の e^{-ct}-subprocess $\beta_0(t)$を考えよう. $\beta_0(t, \omega)$ は時刻 $\sigma(\omega)$ で消滅するが, いまその代りに $k\ (\neq 1)$ 個に分裂する(あるいは新しく k個の粒子が生れたといってもよい)と考えよう. このとき kは 0 から Nまでの値をとり得るが, 丁度 k個に分裂する確率は c_k/c $(k \neq 1)$ とする. もう少し詳しいうと, $\beta(t)$は tの連続関数であったから消滅直前の位置は確定し $\beta_0(\sigma(\omega)-, \omega)$ で表わされる. いま $a = \beta_0(\sigma(\omega)-, \omega)$ とし $\sigma(\omega)$ を $\tau_1(\omega)$ と書くことにする. このとき時刻 $t = \tau_1(\omega)$ で aに k個の粒子が新しく生れる確率を c_k/c とする. ただし $k=0$ のときは粒子は変質し, extra point δ に移りそれ以後永久に δに留まるものとする. そして $k \neq 0$ のときは, k個の粒子は aを出発点とし以後互いに独立に運動し, 各粒子の運動は aから出発した $\beta_0(t)$ と同じ法則に従うものとする. したがってそれぞれの粒子はその消滅時刻を迎える. 第 i 番目の粒子の消滅時刻を σ_i とし $\tau_2 = \min(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$ とおこう. $\tau_2 = \sigma_i$ とし, τ_2 の直前の k個の粒子の位置が $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$ であったとする. このとき時刻 $t = \tau_2$ で粒子は確率 c_l/c で $(k+l-1)$ 個に分裂し, $(a_1, a_2, \cdots, a_{i-1}, \underbrace{a_i, \cdots, a_i}_{l},$

$a_{i+1}, a_{i+2}, \cdots, a_k$) から再出発し前と同じ運動を繰り返す．そして第$n$回目の分裂時間を$\tau_n$とすると，$\tau_\infty = \lim \tau_n$までは運動が継続する．そこで$\tau_\infty$以後は$\delta$とは別のextra point Δに留まる状態を考えよう．このような運動を記述するためには一般にn（$\geqq 0$）個の粒子の運動を同時に記述することが必要で$\beta(t)$の状態空間R^1では不十分になる．そのため次の空間を考える．

$$R = R^1 \cup \{\delta\} \quad , \quad \delta \text{ は extra point で孤立点,}$$

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n \quad , \quad \text{ただし } R^0 = \{\delta\} \text{ とする.}$$

R^nに普通の積空間の位相を導入すれば，$\mathbb{R}$は第2可算性公理をみたす *locally compact, separable Hausdorff* 空間になる．その1点コムパクト化を

$$\hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\Delta\}$$

とすれば，前述の運動は$\hat{\mathbb{R}}$上の運動として記述できる．一般にk個の粒子が分裂して（$k+l-1$）個になったときは，R^k上の点からR^{k+l-1}の点に飛躍したと考えられるからである．$\hat{\mathbb{R}}$上の前述の運動を$X(t)$で表わし，$X(t)$を以後標準的分枝マルコフ過程とよぶことにする．$X(0) = x \in R^1$のとき

それ以後の運動は前述の通りであるが，$X(0)=\underline{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in R^k$ のときは前述の時刻 τ_1 における状態のように，最初から k 個の粒子がそれぞれ x_i $(1 \leqq i \leqq k)$ に位置し，それ以後各粒子は独立にかつ $P_0(t)$ と同じ確率法則に従って運動し，k 個の粒子の生存寿命 σ_i $(1 \leqq i \leqq k)$ の最小値 $\tau_1 = \min(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_k)$ で分裂を起すと考える．さらに粒子が δ または Δ に達したときは，それ以後は永久にそこに留まっていると考える．最初の分裂時間 τ_1 以前の粒子の運動のみを考えるとき，これを $X_0(t)$ で表わし，$X(t)$ の non-branching part という．

さて R^1 上の有界連続関数 f に対し $\hat{R}$ 上の関数 $\hat{f}$ を次のように定義する．

$$
(8) \qquad \hat{f}(\underline{x}) = \begin{cases} 0, & \underline{x} = \Delta \in \hat{R} \text{ のとき,} \\ 1, & \underline{x} = \delta \in \hat{R} \quad \text{〃} \\ \prod_{i=1}^{n} f(x_i), & \underline{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n \subset \hat{R} \text{ のとき.} \end{cases}
$$

$\underline{x} \in R^n$ から出発した標準的分枝マルコフ過程 $X(t)$ の確率法則を $P_{\underline{x}}$ で表わし $\hat{f}(X(t))$ の $P_{\underline{x}}$-測度による平均値を考えてみよう．R^1 上の関数 f が条件 $|f| \leqq 1$ をみたすときは，$|\hat{f}(\underline{x})| \leqq 1$ がなりたつから，$\hat{f}(X(t))$ はすべての $\underline{x}$ に対し $P_{\underline{x}}$-可積分となり

$$u(t, \underline{\underline{x}}; f) \equiv E_{\underline{\underline{x}}}[\hat{f}(X(t))]$$

$$= \int_{\hat{\mathbb{R}}} \hat{f}(\underline{\underline{y}})\, P_{\underline{\underline{x}}}(X(t) \in d\underline{\underline{y}})$$

は常に存在する．さらに$\underline{\underline{x}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$のとき各$x_i$から出発した粒子はたがいに独立な運動をすることから

(9) $$u(t, \underline{\underline{x}}; f) = \prod_{i=1}^{k} u(t, x_i; f) = \widehat{u(t, \cdot\,; f)}(\underline{\underline{x}})$$

がなりたつ．この性質を使うと$u(t, x; f)$，$x \in R^1$，が(3)の解を与えることが次のようにしてわかる．

$$u(t, x; f) = E_x[\hat{f}(X(t))], \quad (x \in R^1),$$

$$= E_x[\hat{f}(X(t)); \; t < \tau_1]$$

$$+ E_x[\hat{f}(X(t)); \; \tau_1 \leqq t]$$

と分解して考えよう．右辺第1項を$u_0(t, x)$とおくと$t < \tau_1$の範囲では$X(t)$と$\beta_0(t)$は同じ確率法則に従っているから

$$u_0(t, x) = E_x^0[f(\beta_0(t))] = e^{-ct}\int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, y) f(y)\, dy$$

がなりたつ．さらに

$$(10)\quad \begin{aligned} &P_x(X(t)\in dy\subset R^1,\ \tau_1\in(t,t+dt)) \\ &= e^{-ct}p(t,x,y)\,dy\cdot c\,dt \end{aligned}$$

を使うと，$X(t)$ が強マルコフ過程で，τ_1 がマルコフ時間となっていることから（[　] 参照）

$$E_x[\hat{f}(X(t));\ \tau_1\leqq t]=E_x[u(t-\tau_1,X_{\tau_1};f);\tau_1\leqq t]$$

となり，(9) と (10) から

$$=\int_0^t e^{-cs}c\,ds\int_{-\infty}^{\infty}p(s,x,y)dy\sum_{k\neq1}\frac{c_k}{c}u(t-s,\underbrace{(y,y,\cdots,y)}_{k};f)$$

$$=\int_0^t e^{-cs}ds\int_{-\infty}^{\infty}p(s,x,y)\sum_{k\neq1}c_k\,u(t-s,y;f)^k dy\quad ((9)による)$$

が得られる．この式と u_0 の式を併せて

$$(11)\quad u(t,x;f)=u_0(t,x)+\int_0^t e^{-cs}ds\int_{-\infty}^{\infty}p(s,x,y)\cdot\sum_{k\neq1}c_k\,u(t-s,y;f)^k dy$$

となり，$c=-c_1$ なることを想い出せば $u(t,x;f)$ が (3) の解になることがわかる．

(II)　$c_k>0$ $(0\leqq k\leqq N.)$ のとき．

$c_1>0$ のときも分裂時刻で新しい1個の粒子に生れ変った（1個に分裂？）状態を考えることにより処理できるので（[3] 参照），簡単のためここでは $c_1=0$ の場合のみを考える．

（二）の場合には $c=-c_1$ であったので (11) の被積分関数中の e^{-cs} と $u_0(t,x)$ にかかっている e^{-ct} がうまく作用して (11) と (3) が同等になっている．したがって被積分関数と $u_0(t,x)$ に表われる e^{-cs} に相当する部分を定数1で置き換える方法がみつかれば (II) の場合も処理できる．このため，ふたたび $c=\sum_k c_k$ とおき，$\beta(t)$ の e^{-ct} subprocess $\beta_0(t)$ を考える．そして $\beta_0(t)$ の消滅時刻 σ で粒子が消滅する代りに年令を1才増した粒子を考えることにする．すなわち R^1 上の運動の代りに

$$E=R^1\times N, \quad N=\{0,1,2,\cdots\}$$

上の運動 $(\bar\beta(t), n(t))$ を次のように考える．$(x,k)\in E$ から出発する運動 $(\bar\beta_0(t), n(t))$ の第1座標の従う確率法則は $\beta_0(t)$ の確率法則 P_x^0 と同じで，その消滅時刻を σ_1 とするとき，第2座標 $n(t)$ は σ_1 までは不変，i.e.

$$n(t)=k\ (=n(0)), \quad 0\leqq t<\sigma_1.$$

つぎに時刻 $t=\sigma_1$ で点 $(\bar{\beta}_0(\sigma_1-), k)\in E$ から $(\bar{\beta}_0(\sigma_1-), k+1)\in E$ に飛躍し以後,前と同様の運動をくり返す.この運動を結ぎ合せて $(\bar{\beta}(t), n(t))$ と表わすと,第1座標 $\bar{\beta}(t)$ は実は R^1 上のブラウン運動そのものであり,第2座標 $n(t)$ は $\sigma_1, \sigma_2, \cdots$ で1だけ飛躍する整数値の確率過程で $n(t)-n(0)$ はパラメター c のポアッソン過程である.この $(\bar{\beta}(t), n(t))$ を年令付きブラウン運動と呼び以後 $\bar{B}(t)$ と表わす.

(I)では $\beta(t)$ を基礎の運動にとったが,今回は年令付きブラウン運動 $\bar{B}(t)$ を基礎の運動にする.$\bar{B}(t)$ の e^{-ct} subprocess を $\bar{B}_0(t)$ としよう.さらに改めて

$$E = R^1 \cup \{\delta\} \times N$$

とし,前の $\hat{R}$ に対応する空間として

$$\mathbb{E} = \bigcup_{n=0}^{\infty} E^n, \qquad E^0 = \{\delta\} \times N,$$

の1点コムパクト化

$$\hat{\mathbb{E}} = \mathbb{E} \cup \{\Delta\}$$

を考える.(δ を R^1 の孤立点し,N には discrete top. を入れその直積位相で E を考える.E^n はさらにその直積位相で考え

れば$\mathbb{E}$は第２可算性公理をみたし，locally compact な可分ハウスドルフ空間になる。）$\hat{\mathbb{E}}$上の分枝マルコフ過程を次のように構成する。

$\underline{x}=((x_1,n_1),(x_2,n_2),\cdots,(x_k,n_k))\in E^k$ とし，$\bar{B}_0^{(1)}(t)$, $\bar{B}_0^{(2)}(t)$, $\cdots$, $\bar{B}_0^{(k)}(t)$ をたがいに独立で，その出発点がそれぞれ (x_i, n_i) である $\bar{B}(t)$ の e^{-ct}-subprocess とする．このとき $\bar{B}_0^{(i)}(t)$ の消滅時刻を τ_i' とし

$$\tau_1(\omega)=\min(\tau_1'(\omega),\tau_2'(\omega),\cdots,\tau_k'(\omega))$$

とおく．さて $\underline{x}$ から出発する運動として

$$X(t)\equiv(x(t),n(t))=(\bar{B}_0^{(1)}(t),\bar{B}_0^{(2)}(t),\cdots,\bar{B}_0^{(k)}(t)),\ t<\tau_1$$

とし，時刻 $t=\tau_1$ で $X(t)$ は分裂を起こし $\hat{\mathbb{E}}$ 上の別の点に飛躍する．その飛躍の仕方は $X(\tau_1-)=((a_1,n_1),(a_2,n_2),\cdots,(a_k,n_k))$ でかつ $\tau_1=\tau_i'$ ならば確率 c_ℓ/c で

$$X(\tau_1)=((a_1,n_1),(a_2,n_2),\cdots,(a_{i-1},n_{i-1}),\underbrace{(a_i,n_i),(a_i,0),\cdots,(a_i,0)}_{\ell},$$

$$(a_{i+1},n_{i+1}),\cdots,(a_k,n_k))$$

に飛躍する．そして今度は $X(\tau_1)$ を出発点として前の運動をくり返す．このとき $\ell=0$ なら上の右辺で $((a_i,n_i),(a_i,0),\cdots,$

$(a_i, 0)$) の部分は (δ, n_i) で置き換えられる．さらに１度 (δ, n) に到達した粒子は以後永久にそこに留まり，また $\tau_\infty = \lim \tau_n$ （τ_n は第 n 回目の分裂時刻）以後は永久に Δ に留まるものとする．このように定義された $X(t)$ は $\hat{E}$ 上のマルコフ過程であるが，以後これを年令つき分枝マルコフ過程と呼ぶ．そして $X(t)$ の最初の分裂時刻 τ_1 以前のみを考えたものを $X_0(t)$ で表わし，$X_0(t)$ を $X(t)$ の non-branching part という．

$(x, n) \in E$ から出発した $X_0(t)$ の確率法則 $P^0_{(x,n)}$ を求めてみよう．$X_0(t)$ は年令つきブラウン運動 $\bar{B}(t) = (\bar{\beta}(t), n(t))$ の sub-process だったことを思い出せば $X_0(t) = (x_0(t), n_0(t))$ の確率法則は

$$P^0_{(x,n)}(x_0(t) \in dy,\ n_0(t) = n+l)$$

$$(12) \qquad = e^{-ct} P_{(x,n)}(\bar{\beta}(t) \in dy,\ n(t) = n+l)$$

$$= e^{-2ct} \frac{(ct)^l}{l!} p(t,x,y)\, dy$$

で与えられることがわかる．さらに $(x, n) \in E$ から出発した $X(t)$ の最初の分裂時刻 τ_1 における状態を示す確率法則は，$X(t) = (x(t), n(t))$，$t < \tau_1$，とかくとき

$$P_{(x,n)}\left(x(t)\in dy\subset R^1,\ n(t)=n+l,\ \tau_1\in(t,t+dt)\right)$$

$$(13)\qquad = e^{-2ct}\frac{(ct)^l}{l!}\,p(t,x,y)\,c\,dt\,dy$$

で与えられることが，(12) と τ_1 の定義から容易に得られる．

以下の手続きは (I) の場合の真似である．$\hat{E}$ の点 $((x_1,n_1),(x_2,n_2),\cdots,(x_l,n_l))$ を粒子の位置を表わす部分と年令を表わす部分に分けて $((x_1,x_2,\cdots,x_l),(n_1,n_2,\cdots,n_l))=(\underline{x},\underline{n})$, $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_l)\in R$, $\underline{n}=(n_1,n_2,\cdots,n_l)$, と書くことにし，(I) の $\hat{f}$ に相当する関数 $\tilde{f}$ を次のように定義する．R^1 上の関数 f が与えられたとき (8) の $\hat{f}$ を使い

$$(14)\qquad \begin{aligned}\tilde{f}(\underline{x},\underline{n}) &= 2^{|\underline{n}|}\,\hat{f}(\underline{x}),\\ \tilde{f}(\Delta) &= 0,\end{aligned}$$

ただし $|\underline{n}|=n_1+n_2+\cdots+n_l$ とする．したがって $\underline{0}=(0,0,\cdots,0)$ のときは $\tilde{f}(\underline{x},\underline{0})=\hat{f}(\underline{x})$ である．さて $|f|\leq 1$ のときは $|\hat{f}|\leq 1$ であったが，こんどの $\tilde{f}$ は $2^{|\underline{n}|}$ がかかっているから非有界関数である．したがって $\hat{E}$ 上のマルコフ過程 $X(t)$ を，粒子の位置と年令に分けて $X(t)=(\underline{x}(t),\underline{n}(t))$ とかくとき $\tilde{f}(X_t)=\tilde{f}(\underline{x}(t),\underline{n}(t))$ は $X(t)$ の確率法則 $P_{(\underline{x},\underline{n})}$ に関し可積分とは限らない．(一般には $|f|\leq 1$ であっても，t が十分小さい範

囲でだけ $\hat{f}(X(t))$ は可積分，すなわち $\tilde{f}(X(t))$ の平均値は有限確定となり，t が大きくなると $\hat{f}(X(t))$ の平均値は存在しない（このことから(3)には一般に大域解が存在しないことが導かれる．[2]参照）．しかしもし $\hat{f}(X(t))$ が $P_{(\xi,\eta)}$-測度に関し可積分の場合には粒子の運動の独立性から(9)に対応する関係

$$
\begin{aligned}
u(t,(\xi,\eta);f) &= E_{(\xi,\eta)}[\tilde{f}(X(t))] \\
&= 2^{|\eta|}E_{(\xi,0)}[\tilde{f}(X(t))] \qquad (15)\\
&= \widetilde{u(t,(\cdot,0);f)}(\xi,\eta)
\end{aligned}
$$

がなりたつ．(15)の右辺は $u(t,(\cdot,0);f)$ を・を変数とする R^1 上の関数とみなし，それに対し(14)の操作～を施した $\hat{E}$ 上の関数の (ξ,η) における値の意味である．さらに(I)の場合と同様に $\hat{f}(X(t))$ の平均値を第1分裂時刻 τ_1 以前とそれ以後の部分の積分の和に分ければ

$$
\begin{aligned}
u(t,(\xi,\eta);f) &= E_{(\xi,\eta)}[\tilde{f}(X(t));\ t<\tau_1] \\
&\quad + E_{(\xi,\eta)}[\tilde{f}(X(t));\ t\geq\tau_1] \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となる．とくに $(\xi,\eta)=(x,0)\in E^1$ のときは(12)から

$$u_0(t,(x,0);f) = E_{(x,0)}[\hat{f}(X(t))\ ;\ t<\tau_1]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ct} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(ct)^\ell}{\ell!} 2^\ell p(t,x,y) f(y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} p(t,x,y) f(y)\, dy$$

となり，さらに τ_1 の強マルコフ性と (13), (15) から

$$E_{(x,0)}[\hat{f}(X(t))\ ;\ t \geq \tau_1]$$

$$= E_{(x,0)}[\,E_{(\underline{\underline{x}}(\tau_1),\, \underline{\underline{n}}(\tau_1))}[\hat{f}(X(t-s))]_{s=\tau_1}\ ;\ t\geq\tau_1]$$

$$= \int_0^t e^{-2cs} c\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cs)^n}{n!} p(s,x,y)$$

$$\times \sum_k \frac{c_k}{c} u(t-s,(\underline{\underline{y}}_k, \underline{\underline{n}}');f)\, dy,$$

ただし $\underline{\underline{y}}_k = ((\underbrace{y,y,\cdots,y}_{k})),\quad \underline{\underline{n}}' = (\underbrace{n,0,\cdots,0}_{k}),$

$$= \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,y) \sum_k c_k\, u(t-s,(y,0);f)^k\, dy \qquad ((14),(15))$$

が得られる．この２つの式を (16) に代入して，$\hat{f}(X(t))$ が $P_{(x,0)}$－測度に関し可積分のときは $v(t,x;f) = u(t,(x,0);f)$

は

$$(17)\qquad v(t,x;f)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x,y)f(y)\,dy+\int_0^t ds\int_{-\infty}^{\infty}p(s,x,y)\sum_k c_k v(t-s,y;f)^k\,dy$$

の解，したがって(3)の解を与えることがわかる．

(III) c_k の符号が一定でないとき．

この場合は(II)の $\hat{E}$ の copy を考え片方を正の世界，他方を負の世界（または反世界）と呼ぶことにし，$c_k<0$ の場合は正の世界にあったものは負の世界に，負の世界にあったものは正の世界に移る操作と考えることにより処理される．このとき対応する関数 $\hat{f}$ は正の世界と負の世界では符号が反対になるように定義されるが，その他のことは(II)の場合と同様に処理できるので省略する（[3]参照）．

§2．(1)，(2)に対応する分枝マルコフ過程の状態空間．

§1で考えたことは結局(11)または(17)を確率論的に解釈することであった．その考えでいくと，(1)を解釈するためには方程式

$$(18)\qquad v(t,x;f)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x,y)f(y)\,dy+\int_0^t ds\int_{-\infty}^{\infty}p(t-s,x,y)\sum_k c_k v(s,y;f)^k\frac{\partial v}{\partial y}\,dy$$

に確率論的な解釈を与えることができればよいことになる

さて (17) と (18) の相違は，(18) の右辺第2項の被積分関数に $\partial v/\partial y$ がでている点である．そこで (18) の右辺第2項を

$$\lim_{h\to 0}\int_0^t ds\int_{-\infty}^{\infty} p(t-s,x,y)\sum_k \frac{c_k}{h}\, v^k(s,y;f)\,[v(s,y+h;f)-v(s,y;f)]\,dy$$

と考えれば，これから (18) に移るには $h\to 0$ の極限においてある時刻に同じ座標にある正負の世界の粒子（§1 の(III) 参照) が衝突して新型の粒子を生じ，その影響で $\partial v/\partial y$ なる項が表れるとみなしうる．この考えで (1) を解釈するためには §1 の状態空間 $\hat{R}$ あるいは $\hat{E}$ に新型の粒子の運動を記述するための点を追加しなくてはならない．

以下では考え方は §1 のそれぞれの場合と同じであるので，(II) の場合と同様に (1)，(2) に表われる多項式 $P(u)$, $P(u, \partial u/\partial x)$ の係数 c_k および c_{pq} はすべて正の場合のみを考えることにする．

§1 の (II) で考えた空間 $E = R^1\cup\{\delta\}\times N$ の点 (x, n) にあった粒子が変型して生ずる新型の点を $D(x, n)$ と書くことにする．一般に $\underline{E}$ の点 $(\underline{x}, \underline{n})$ に対応する新しい型の点は $D(\underline{x}, \underline{n})$ で表わされる．D は単に記号としての意味しかなく，将来 $D(x, 0)$ から出発した粒子の運動に対し適当に $\hat{f}$ を定義することにより $\partial v/\partial x$ を出そうというわけである．このため次

の空間を考える

$$\mathbb{E}_0=\bigcup_{n=0}^{\infty} E^n$$

とし，$\mathbb{E}_0$ の点 $(\underline{\underline{\xi}},\underline{\underline{\eta}})$ に D を添加した点の全体を $D\mathbb{E}_0$，すなわち

$$D\mathbb{E}_0=\{D(\underline{\underline{\xi}},\underline{\underline{\eta}})\ ;\ (\underline{\underline{\xi}},\underline{\underline{\eta}})\in\mathbb{E}_0\}.$$

さらに $\mathbb{E}_n$，$D\mathbb{E}_n$ が定義されているとき

$$\mathbb{E}_{n+1}=\bigcup_{k=1}^{\infty}(\mathbb{E}_n\cup D\mathbb{E}_n)^k,$$

$$D\mathbb{E}_{n+1}=\{D\underline{\underline{z}}\ ;\ \underline{\underline{z}}\in\mathbb{E}_{n+1}\}$$

で $\mathbb{E}_{n+1}$，$D\mathbb{E}_{n+1}$ を定義し

$$\mathbb{S}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}_n$$

とおく．このとき $\mathbb{E}_0$ での位相は§1で与えられたものとし（§1の $\mathbb{E}$ が $\mathbb{E}_0$ である），$\underline{\underline{z}}_k=(\underline{\underline{\xi}}_k,\underline{\underline{\eta}}_k)\in\mathbb{E}_0$ で $\underline{\underline{z}}_k\to\underline{\underline{z}}_0$ のとき $D\underline{\underline{z}}_k\longrightarrow D\underline{\underline{z}}_0$ とすれば $D\mathbb{E}_0$ での位相が与えられる．さらに，一般に $\underline{\underline{z}}_k\to\underline{\underline{z}}_0$ のときに $D\underline{\underline{z}}_k\longrightarrow D\underline{\underline{z}}_0$，$\underline{\underline{z}}_k^{(i)}\to\underline{\underline{z}}_0^{(i)}$ $(1\le i\le l)$ のときに $(\underline{\underline{z}}_k^{(1)},\underline{\underline{z}}_k^{(2)},\cdots,\underline{\underline{z}}_k^{(l)})\longrightarrow(\underline{\underline{z}}_0^{(1)},\underline{\underline{z}}_0^{(2)},\cdots,\underline{\underline{z}}_0^{(l)})$ と定義すれば $\mathbb{S}$ での位相が与えられたことになる．

この位相で$\mathbb{S}$は第2可算性公理をみたす separable Hausdorff になるから、その1点コンパクト化を$\hat{\mathbb{S}} = \mathbb{S} \cup \{\Delta\}$と書くことにする。この$\hat{\mathbb{S}}$を状態空間とする分枝マルコフ過程を考えようというわけである（$\mathbb{S}$の点は記号Dを無視すれば実は$\mathbb{S}$1の$\mathbb{E}$の点とみなされて、本質的には空間は拡張されてはいない）

以下の記述を簡便にするため、$\hat{\mathbb{S}}$の点を次のように表わすことにする。$\underline{\underline{z}} \in \mathbb{S}$に対し

$$D^0 \underline{\underline{z}} = \underline{\underline{z}}, \quad D^\ell \underline{\underline{z}} = \underbrace{D(D(\cdots(D}_{\ell}\underline{\underline{z}})) \cdot), \quad \ell \geq 1$$

とすると、$\mathbb{E}_n$の点は

$$\underline{\underline{z}} = (D^{\varepsilon_1}\underline{\underline{z}}_1, D^{\varepsilon_2}\underline{\underline{z}}_2, \cdots, D^{\varepsilon_k}\underline{\underline{z}}_k),$$

$$\varepsilon_i = 0 \text{ または } 1, \quad \underline{\underline{z}}_i \in \mathbb{E}_{n-1}, \quad i = 1, 2, \cdots, k,$$

と表わされる。この関係を

$$\underline{\underline{z}} = \prod_{i=1}^{k} D^{\varepsilon_i}\underline{\underline{z}}_i$$

と書くことにすると、$\mathbb{S}$の点$\underline{\underline{z}}$は

$$\underline{\underline{z}} = \prod_{i_1=1}^{k_1} D^{\varepsilon_{i_1}} \Big(\prod_{i_2=1}^{k_{12}} D^{\varepsilon_{i_1 i_2}} \big(\cdots \; D^{\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}} \prod_{i_\ell=1}^{k_{12\cdots\ell}} (x_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}, n_{i_1 i_2 \cdots i_\ell})\big)\Big),$$

$$(x_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}, n_{i_1 i_2 \cdots i_\ell}) \in E, \quad \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_j} = 0 \text{ または } 1,$$

あるいは省略して

$$\underline{z} = \prod \cdot D^{\varepsilon_\gamma} \prod_{i=1}^{k_\gamma} (x_{\gamma i}, n_{\gamma i}) \ , \quad (x_{\gamma i}, n_{\gamma i}) \in E$$

と書くことができる.

§3. $\hat{S}$ 上の分枝マルコフ過程.

この節では(2)に対応するマルコフ過程を構成する. §1の(III)の方法をとれば $c_{pq} < 0$ の場合も処理できるから, 簡単のために, (2)の $P(u, \partial u/\partial x)$ の係数 c_{pq} がすべて正の場合のみを考える.

$$C = \sum_{\substack{0 \leq p \leq N \\ 1 \leq q \leq M}} c_{pq}$$

とし, 年令付きブラウン運動 $\bar{B}(t)$ の e^{-Ct} subprocess を使って §1の(II)の方法で $\underline{E} = \underline{E}_0$ 上に $\hat{E}$ 上の分枝マルコフ過程の non-branching part $X_0(t)$ を最初に構成しておく. $\hat{S}$ 上の点を

$$\underline{z} = \prod \cdot D^{\varepsilon_\gamma} \prod_{i=1}^{k_\gamma} (x_{\gamma i}, n_{\gamma i})$$

とするとき, 右辺から D^{ε_γ} を取りさった点

$$\underline{\underline{z}}' = \prod \prod_{i=1}^{k_\gamma} (x_{\gamma i}, \eta_{\gamma i}) = \prod (\underline{\underline{x}}_\gamma, \underline{\underline{\eta}}_\gamma),$$

$$(\underline{\underline{x}}_\gamma, \underline{\underline{\eta}}_\gamma) \in E^{k_\gamma},$$

は $\mathbb{E}_0$ の点である．したがって $\underline{\underline{z}}'_\gamma = (\underline{\underline{x}}_\gamma, \underline{\underline{\eta}}_\gamma)$ から出発する上述の non-branching part を $X_0^{(\gamma)}(t)$ とかくと，$\underline{\underline{z}}'$ から出発する non-branching part $X_0(t)$ は

$$X_0(t) = (\cdots, X_0^{(\gamma)}(t), \cdots)$$

となっている．$X_0^{(\gamma)}(t)$ の消滅時刻を τ_γ，τ_γ の最小値を τ とし

$$Y_0(t) = \prod \cdot D^{\varepsilon_\gamma} X_0^{(\gamma)}(t), \qquad t < \tau,$$

とおくと，$Y_0(t)$ は $\hat{S}$ 上のマルコフ過程である．この $Y_0(t)$ を non-branching part とする $\hat{S}$ 上のマルコフ過程 $Y(t)$ を次のように作る．まず

$$Y(t) = Y_0(t), \qquad t < \tau$$

とする．そして $\tau = \tau_{\gamma'}$ で

$$Y_0(\tau-) = \prod \cdot D^{\varepsilon_\gamma} \underline{\underline{z}}_\gamma \tag{19}$$

としよう．このとき $\gamma = \gamma'$ では

$$\underline{\underline{z}}_{\gamma'} = ((x_1, n_1), \cdots, (x_i, n_i), \cdots, (x_{k_{\gamma'}}, n_{k_{\gamma'}}))$$

とする．$\tau_{\gamma'}$ は上の (x_j, n_j) にいた各粒子のどれかが消滅した時刻であるが，いま (x_i, n_i) にいた粒子の消滅時刻が $\tau = \tau_{\gamma'}$ だったとする．このとき $\underline{\underline{z}}_{\gamma'}$ の i 成分が確率 c_{pq}/c で $(p+q)$ 個に分裂し

$$\underline{\underline{y}}_i = (\underbrace{(x_i, n_i), (x_i, 0), \cdots, (x_i, 0)}_{p}, \underbrace{D(x_i, 0) \cdots, D(x_i, 0)}_{q}) \in E^p \times (DE)^q$$

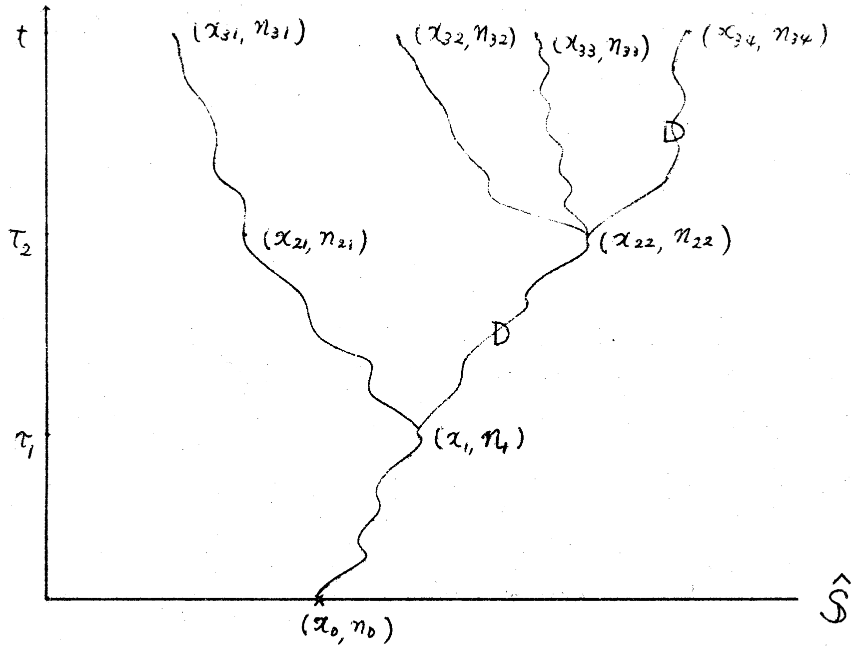
に飛躍するようにする．そして

(20) $$Y(\tau) = \Pi \cdot D^{\varepsilon_\gamma} \underline{\underline{y}}_\gamma,$$

ただし $\underline{\underline{y}}_\gamma = \underline{\underline{z}}_\gamma \quad (\gamma \neq \gamma')$，$\underline{\underline{y}}_{\gamma'} = ((x_1, n_1), \cdots, (x_{i-1}, n_{i-1}), \underline{\underline{y}}_i, (x_{i+1}, n_{i+1}), \cdots, (x_{k_{\gamma'}}, n_{k_{\gamma'}}))$，

とし，この $Y(\tau)$ から前述の $Y_0(t)$ と stochastic に同等な運動を出発させる．そのどれかの粒子の消滅時刻では再び上と同じ手続きを繰り返す．このようにして無限回の飛躍後は extra point Δ に永久に留まることにすると $\hat{S}$ 上のマルコフ過程 $Y(t)$ が得られる．上の記述でふれられなかった $\hat{S}$ の点 Δ，(δ, k)，$D(\delta, k)$ 等はすべて $Y(t)$ の trap とする．この $Y(t)$ が強マルコフ過程であることは，標準的分枝マルコフ過程の場合の path-stitching 法から強マルコフ性を得る手続きを考

えれば当然であろう（[1] 参照）。$(x_0, n_0) \in E$ から出発した $Y(t)$ の運動を図示すると次のようになっている。



図の説明：(x_0, n_0) から出発した $Y(t)$ は最初の分裂時刻 τ_1 までは §1，(II) の場合と同様で，寿命つきブラウン運動の e^{-ct} subprocess $B_0(t)$ である。時刻 τ_1 で分裂を起こすが，その直前の位置 $Y(\tau_1-)$ は (x_1, n_1) であったとする。このとき確率 c_{pq}/c で $((x_1,n_1),(x_1,0),\ldots,(x_1,0), D(x_1,0),\ldots,D(x_1,0)) \in E^p \times (DE)^q$ に飛躍する。上の図は $p = q = 1$ の場合で $Y(\tau_1) = ((x_1,n_1), D(x_1,0))$ である。τ_1 から τ_2 までの運動は，(x_1, n_1) から出発した寿命つきブラウン運動 $\bar{B}(t)$ の e^{-ct} sub-process を $B_0^{(1)}(t)$，$(x_1, 0)$ から出発した sub-process を $B_0^{(2)}(t)$，ただし $B_0^{(1)}$ と $B_0^{(2)}$ はたがいに独立，とするとき $Y(\tau_1+t) = (B_0^{(1)}(t), DB_0^{(2)}(t))$ で表わされ

る．図は $B_0^{(2)}(t)$ の消滅時刻 τ_2 が $B_0^{(1)}(t)$ の消滅時刻より小であり $B_0^{(1)}(\tau_2-)=(x_{21},n_{21})$，$B_0^{(2)}(\tau_2-)=(x_{22},n_{22})$，したがって $Y(\tau_2-)=((x_{21},n_{21}),\ D(x_{22},n_{22}))$ であることを示す．さらに (x_{22},n_{22}) にあった粒子が分裂し $((x_{22},n_{22}),\ (x_{22},0),\ D(x_{22},0))$ に飛躍し（この確率は c_{21}/c），$Y(\tau_2)=((x_{21},n_{21}),\ D((x_{22},n_{22}),\ (x_{22},0),\ D(x_{22},0)))$ となる．τ_2 以後 t までは分裂が無かった状態が図の状態である．

このように $Y(t)$ の path の軌跡は，D を落してしまえば §1 の（II）で扱った $X(t)$ と同じものになっていて，その相違は $\partial/\partial x$ を処理するため新種の状態に D をつけて表わしているだけである．

§4．(1) と (2) の解

$f(x)$ を R^1 上の C_0^∞-関数（無限回微分可能，support は compact）とする．このとき $\tilde{f}$ を §1 と同様に

$$\tilde{f}(\underline{x})=\begin{cases} 2^{\sum_{i=1}^{k} n_i}\prod_{i=1}^{k} f(x_i), & \underline{x}=((x_1,n_1),\cdots,(x_k,n_k))\in E^k, \\ 2^{\sum_{i=1}^{k} n_i}, & \underline{x}=((\delta,n_1),\cdots,(\delta_k,n_k)), \\ 0, & \underline{x}=\Delta. \end{cases}$$

で定義する．次に $\tilde{f}(\underline{x})$，$\tilde{f}(\underline{y})$ が定義されているとき

$$\tilde{f}((\underline{\underline{x}},\underline{\underline{y}})) = \tilde{f}(\underline{\underline{x}})\,\hat{f}(\underline{\underline{y}}),$$

$$\text{(21)}\qquad \hat{f}(D\underline{\underline{x}}) = \begin{cases} \sum_{i,r} \dfrac{\partial}{\partial x_{ri}} \hat{f}(\underline{\underline{x}}), & \underline{\underline{x}} = \prod D^{\varepsilon_r} \prod_{i=1}^{k_r} (x_{ri}, n_{ri}), \\ 0, & \underline{\underline{x}} = \prod D^{\varepsilon_r} \prod_{i=1}^{k_r} (\delta, n_{ri}), \end{cases}$$

と定義すると $\hat{f}$ は $\hat{S}$ 上の関数として矛盾なく定義される．上式の右辺を $D\hat{f}(\underline{\underline{x}})$ または $\partial\hat{f}(\underline{\underline{x}})/\partial\underline{\underline{x}}$ と書くことにすると

$$\text{(22)}\qquad \hat{f}(D\underline{\underline{x}}) = D\hat{f}(\underline{\underline{x}}) = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{x}}}\hat{f}(\underline{\underline{x}}).$$

さて $Y(t)$ の第 ℓ 回目の分裂時刻を τ_ℓ で表わし（$\tau_0 = 0$ とする），v_ℓ を次の式で定義しよう．

$$v_\ell(t,\underline{\underline{x}};f) = E_{\underline{\underline{x}}}[\hat{f}(Y(t));\ \tau_\ell \leq t < \tau_{\ell+1}],$$
$$\underline{\underline{x}} \in \hat{S},\quad t \geqq 0,\quad \ell \geqq 0.$$

このとき各粒子の運動の独立性から $(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{y}}) \in \hat{S}$ に対し

$$P_{(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{y}})}(Y(t) \in A \subset \hat{S},\ \tau_\ell \leq t < \tau_{\ell+1})$$
$$= \sum_{r=0}^{\ell} \iint_{(\underline{\underline{x}}',\underline{\underline{y}}') \subset A} P_{\underline{\underline{x}}}(Y(t) \in d\underline{\underline{x}}',\ \tau_r \leqq t < \tau_{r+1})$$
$$\cdot P_{\underline{\underline{y}}}(Y(t) \in d\underline{\underline{y}}',\ \tau_{\ell-r} \leqq t < \tau_{\ell-r+1})$$

がなりたつから

(23) $$U_\ell(t,(\underline{\underline{x}},\underline{\underline{y}});f)=\sum_{r=0}^{\ell} U_r(t,\underline{\underline{x}};f)\,U_{\ell-r}(t,\underline{\underline{y}};f),\quad \ell\geq 0,$$

が得られる．さらに $\underline{\underline{x}}=\prod_{i=1}^{k}(x_i,n_i)\in E^k\subset\hat{S}$ のときは，p.16 の最初の式から

$$U_0(t,(x_i,n_i);f)=2^{n_i}\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x_i,y)f(y)\,dy,$$

$$U_0(t,\underline{\underline{x}};f)=2^{|\underline{\underline{n}}|}\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}p(t,x_i,y_i)\,f(y_i)\,dy_1\,dy_2\cdots dy_k$$

となり，したがって (21) により

$$U_0(t,D\underline{\underline{x}};f)=2^{|\underline{\underline{n}}|}\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}p(t,x_i,y_i)\cdot\tilde{f}(D(y_1,y_2,\cdots,y_k))\cdot dy_1\,dy_2\cdots dy_k$$

$$=2^{|\underline{\underline{n}}|}\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial}{\partial x_i}\prod_{i=1}^{k}\int_{-\infty}^{\infty}p(t,x_i,y_i)f(y_i)\,dy_i$$

$$=\frac{\partial}{\partial\underline{\underline{x}}}U_0(t,\underline{\underline{x}};f)$$

が得られる．これと同じ考えで一般に

$$U_0(t,D\underline{\underline{x}};f)=\frac{\partial}{\partial\underline{\underline{x}}}U_0(t,\underline{\underline{x}};f),\quad \underline{\underline{x}}\in\hat{S}$$

がなりたつ。さらに $U_\ell(t,D\underline{\underline{x}};f)=D\,U_\ell(t,\underline{\underline{x}};f)$ がな

りたつことを仮定すると，帰納法によりこの関係が $l+1$ に対してもなりたつことが次のようにしてわかる．

$$\mathrm{U}_{l+1}(t, \underline{x}; f) = \int_0^t \int_{\hat{S}} P_{\underline{x}}(Y(t) \in d\underline{y}, \tau_1 \in ds) \cdot \sum \frac{c_{pq}}{c} \mathrm{U}_l(t-s, \underline{y}_{pq}; f),$$

ただし $\underline{y}$ と $\underline{y}_{pq}$ は (19), (20) で $\underline{y} = Y_0(\tau-)$, $\underline{y}_{pq} = Y(\tau)$ とおいたもの．

$$\mathrm{U}_{l+1}(t, D\underline{x}; f) = \int_0^t \int_{\hat{S}} P_{\underline{x}}(Y(t) \in d\underline{y}, \tau_1 \in ds) \cdot \sum \frac{c_{pq}}{c} \mathrm{U}_l(t-s, D\underline{y}_{pq}; f)$$

$$= \int_0^t \int_{\hat{S}} P_{\underline{x}}(Y(t) \in d\underline{y}, \tau_1 \in ds) \cdot \sum \frac{c_{pq}}{c} D\mathrm{U}_l(t-s, \underline{y}_{pq}; f).$$

ここで $\underline{y}$ と $\underline{y}_{pq}$ の関係に注目して部分積分法を施せば U_0 の場合と同様に

$$\mathrm{U}_{l+1}(t, D\underline{x}; f) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \int_0^t \int_{\hat{S}} P_{\underline{x}}(Y(t) \in d\underline{y}, \tau_1 \in ds) \cdot \sum \frac{c_{pq}}{c} \mathrm{U}_l(t-s, \underline{y}_{pq}; f)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \underline{x}} \mathrm{U}_{l+1}(t, \underline{x}; f)$$

がなりたつことがわかる．

このことをくり返せば一般に

$$(24) \qquad U_\ell(t,\ D^r \underline{x}\ ;\ f) = \frac{\partial^r}{\partial \underline{x}^r} U_\ell(t, \underline{x}\ ;\ f), \qquad \ell, r \geq 0$$

が得られる．

さて $\tilde{f}(Y(t))$ が $P_{\underline{x}}$-可積分のときは

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} |U_\ell(t, \underline{x}\ ;\ f)| < \infty$$

でその平均値は

$$E_{\underline{x}}[\tilde{f}(Y(t))] = \sum_{\ell=0}^{\infty} U_\ell(t, \underline{x}\ ;\ f)$$

である．したがって (23) により

$$E_{(\underline{x}, \underline{y})}[\tilde{f}(Y(t))] = \sum_{\ell=0}^{\infty} U_\ell(t, (\underline{x}, \underline{y})\ ;\ f)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\ell} U_r(t, \underline{x}\ ;\ f)\, U_{\ell-r}(t, \underline{y}\ ;\ f)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} U_\ell(t, \underline{x}\ ;\ f) \sum_{\ell=0}^{\infty} U_\ell(t, \underline{y}\ ;\ f)$$

$$= E_{\underline{x}}[\tilde{f}(Y(t))]\, E_{\underline{y}}[\tilde{f}(Y(t))]$$

がなりたつ．同様にその両辺が存在すれば (24) より次式がなりたつ．

$$E_{D\underline{x}}[\tilde{f}(Y(t))] = \frac{\partial}{\partial \underline{x}} E_{\underline{x}}[\tilde{f}(Y(t))].$$

また $\underline{x} = (\underline{x}', \underline{n})$ とかくとき

$$E_{(\underline{x}',\underline{n})}[\tilde{f}(Y(t))] = 2^{|\underline{n}|} E_{(\underline{x}',\underline{0})}[\tilde{f}(Y(t))]$$

もなりたつから、

$$U(t,\underline{x};f) = E_{\underline{x}}[\tilde{f}(Y(t))]$$

とおくとき、(15) に相当する式

(25) $$U(t,\underline{x};f) = \widetilde{U(t,(\cdot,0);f)}(\underline{x})$$

がなりたつ。(25) の右辺は $U(t,(\cdot,0);f)$ を $\cdot$ を変数とする R^1 上の関数とみなし、それに $\sim$ を施した関数を表わす。したがって

$$v(t,x;f) = E_{(x,0)}[\tilde{f}(Y(t))], \quad x \in R^1,$$

$$v_0(t,x;f) = U_0(t,(x,0);f), \quad x \in R^1.$$

とおくとき、形式的計算をすれば §1 のときと同様にして

(26) $$v(t,x;f) = v_0(t,x;f) + E_{(x,0)}[\tilde{f}(Y(t));\ t \geq \tau_1],$$

$$v_0(t, x; f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, y) f(y) dy.$$

$$E_{(x,0)}[\tilde{f}(Y(t)); t \geqq \tau_1]$$

$$= \int_0^t e^{-2cs} c\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cs)^n}{n!} p(s, x, y)$$

$$\cdot \sum_{p,q} \frac{c_{pq}}{c} E_{\underline{\underline{y}}_{pq}} [\tilde{f}(Y(t-s))] dy,$$

ただし $\underline{\underline{y}}_{pq} = ((y,n), (y,0), \cdots, (y,0), D(y,0), D(y,0), \cdots, D(y,0)) \in E^p \times (DE)^q$,

$$= \int_0^t e^{-2cs} c\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(cs)^n}{n!} p(s, x, y) \sum_{p,q} \frac{c_{pq}}{c} \sigma(t-s, \underline{y}_{pq}; f) dy.$$

ここで (25) を使うと

$$= \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, y) \sum_{p,q} c_{pq}\, v(t-s, y; f)^p \left(\frac{\partial}{\partial y} v(t-s, y; f)\right)^q dy.$$

これを (26) に代入すると

$$v(t, x; f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t, x, y) f(y) dy + \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} p(s, x, y) \sum_{p,q} c_{pq}\, v(t-s, y; f)^p$$

$$\cdot \left(\frac{\partial}{\partial y} v(t-s, y; f)\right)^q dy$$

となり §2 の (18) のところで述べたことが証明される。すなわち (1), (2) の確率論的解釈の1つの方法が示されたこと

になる。

残された問題は $\tilde{f}(Y(t))$ の可積分性である。f は C_0^∞-級関数だから

$$|U_0(t,(x,0);f)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} p(t,x,y)\,f(y)\,dy\right| \leqq \max_{x\in R^1}|f(x)| \equiv \|f\|,$$

$$|U_0(t,D(x,0);f)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} p(t,x,y)\,f'(y)\,dy\right| \leqq \|f'\|$$

がなりたつ。したがって

$$A = \|f\| \vee \|f'\| \vee 1,$$

$$a = \sup_{l} \frac{\{2+2\log(l+1)\}^{N+M}}{l+1}, \qquad N, M \text{ は } P \text{ の次数}$$

$$B = A^{N+M}\,c\,a, \qquad c = \sum_{p,q} c_{pq}, \quad c_{pq} > 0,$$

とおくと

$$|U_0(t,(x,0);f)|, \quad |U_0(t,D(x,0);f)| \leqq A.$$

数学的帰納法によって次の式を証明しよう。

(27) $$|U_l(t,(x,0);f)|, \ |U_l(t,D(x,0);f)| \leqq A\frac{B^l t^{\frac{l}{2}}}{l+1}, \quad l \geqq 0, \ 0 \leqq t \leqq 1.$$

$l=0$ のとき上式がなりたつことはすでに示したから，l

までは (27) がなりたつことを仮定して $l+1$ のときにもなりたつことを示そう. $\underline{x} = (\underline{x}_1, \underline{n})$ のとき

$$U_l(t,(\underline{x}_1,\underline{n});f) = E_{(\underline{x}_1,\underline{n})}[\tilde{f}(Y(t)) ; \tau_l \leq t < \tau_{l+1}]$$

$$= 2^{|\underline{n}|} E_{(\underline{x}_1,\underline{0})}[\tilde{f}(Y(t)) ; \tau_l \leq t < \tau_{l+1}]$$

$$= 2^{|\underline{n}|} U_l(t,(\underline{x}_1,\underline{0}) ; f)$$

なることに注意すれば, p.31 の計算と同様にして

$$U_{l+1}(t,(x,0);f) = \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,y)$$

$$\cdot \sum_{p,q} c_{pq}\, U_l(t-s, (\underbrace{(y,0),\cdots,(y,0)}_{p}, \underbrace{D(y,0),\cdots,D(y,0)}_{q}))\, dy$$

を得る. ここで右辺の U_l に (23) を繰り返し適用すると

$$U_{l+1}(t,(x,0);f) = \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,y)$$

$$\cdot \sum_{p,q} c_{pq} \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_{p+q}=l} \prod_{i=1}^{p} U_{r_i}(t-s,y;f)$$

$$\cdot \prod_{j=p+1}^{p+q} U_{r_j}(t-s,D(y,0);f)\, dy$$

となる. さらに不等式

$$\sum_{r_1+r_2+\cdots+r_k=l} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{r_i+1} < \frac{2^{k-1}}{l+1}\{1+\log(l+1)\}^k$$

と帰納法の仮定を使うと

$$\begin{aligned}
|U_{l+1}(t,(x,0);f)| &\leqq \int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,y) \sum_{p,q} c_{pq} \sum_{r_1+r_2+\cdots+r_{p+q}=l} \\
&\qquad \prod_{i=1}^{p+q} A \frac{B^{r_i}(t-s)^{\frac{r_i}{2}}}{r_i+1}\, dy \\
&\leqq A^{N+M} B^{l} \frac{\{2+2\log(l+1)\}^{N+M}}{l+1} \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^{\frac{l}{2}} ds \\
&< A B^{l+1} \frac{t^{\frac{l+1}{2}}}{l+1} \qquad (\because 0 \leqq t \leqq 1) .
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
|U_{l+1}(t;D(x,0);f)| &= \Big|\frac{\partial}{\partial x}\int_0^t ds \int_{-\infty}^{\infty} p(s,x,y) \sum_{p,q} c_{pq} \\
&\qquad \cdot U_l(t, \underbrace{(y,0),\ldots,(y,0)}_{p}, \underbrace{D(y,0),\ldots,D(y,0)}_{q}; f)\,dy\Big| \\
&\leqq A^{N+M} B^{l} \frac{\{2+2\log(l+1)\}^{N+M}}{l+1} \frac{1}{2}\int_0^t (t-s)^{\frac{l}{2}} ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y-x|}{s} p(s,x,y)\,dy \\
&< A B^{l+1} \frac{t^{\frac{l+1}{2}}}{l+1} .
\end{aligned}$$

すなわち(27)が証明された。

上の計算では $|v_l|$ を評価した形になっているが，その計算法をみれば実は

$$E_{(x,0)}[|\hat{f}|(Y(t))\ ;\ \tau_l \leqq t < \tau_{l+1}] \leqq A\frac{B^l t^{\frac{l}{2}}}{l+1},\quad l \geqq 0,\ 0 \leqq t \leqq 1,$$

$$E_{D(x,0)}[|\hat{f}|(Y(t))\ ;\ \tau_l \leqq t < \tau_{l+1}] \leqq A\frac{B^l t^{\frac{l}{2}}}{l+1},\quad l \geqq 0,\ 0 \leqq t \leqq 1$$

がなりたっていることがわかる．したがって

$$E_{(x,0)}[|\hat{f}|(Y(t))] \leqq A\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B^l t^{\frac{l}{2}}}{l+1} < \infty,\quad t < \frac{1}{B^2},$$

$$E_{D(x,0)}[|\hat{f}|(Y(t))] \leqq A\sum_{l=0}^{\infty}\frac{B^l t^{\frac{l}{2}}}{l+1} < \infty,\quad t < \frac{1}{B^2},$$

となり，t が十分小さな所では $\hat{f}(Y(t))$ の可積分性が証明されたことになる．

上の計算では f が C_0^∞-級関数であることを，$\hat{f}$ の定義にのみ使い，v_l の評価には使っていない．評価のみから考えれば $\|f\|$, $\|f'\|$ が有限であれば十分である．そこで f が R^1 上の有界連続関数のとき

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t,x,y)\tilde{f}(D^r(y,0))\,dy = (-1)^r\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^r p(t,x,y)}{\partial y^r}f(y)\,dy,\quad x \in R^1,$$

あるいはもっと一般に

$$v_0(t, D\underline{x}\ ; f) = \frac{\partial}{\partial \underline{x}}v_0(t, \underline{x}\ ; f),$$

$$(30)\qquad \mathcal{U}_{\ell+1}(t,\underline{z};f)=\int_0^t ds\int_{\hat{S}} P_{\underline{z}}(Y(s)\in d\underline{y},\ \tau_1\in ds)\,\mathcal{U}_\ell(t-s,\underline{y};f),\qquad \ell\geqq 0.$$

$$E_{\underline{z}}[\hat{f}(Y(t))]=\sum_{\ell=0}^{\infty}\mathcal{U}_\ell(t,\underline{z};f)$$

と考えることにすれば，f, f' の有界性から (28), (29) がなりたつことが導かれ (2) の局所解が得られる

つぎに (1) に対して (30) と同様な考え方をしてみよう．このときは R^1 上の有界連続関数 f に対し

$$A=\|f\|\vee 1,\quad (\|f\|=\sup|f(x)|),\quad B=A^{N+1}ca$$

とおくと，前と同様にして

$$|\mathcal{U}_\ell(t,(x,0);f)|,\ |\sqrt{t}\,\nabla\mathcal{U}_\ell(t,D(x,0);f)|\leqq \frac{AB^\ell t^{\frac{\ell}{2}}}{\ell+1},\quad 0\leqq t\leqq 1$$

が得られるので

$$v(t,x;f)=E_{(x,0)}[\hat{f}(Y(t))],\qquad t<\frac{1}{B^2}$$

が (1) の局所解を与えることがわかる．一方 (1) の解 $v(t,x;f)$ は，ブラウン運動 $\beta(t)$ の確率法則 P_x による積分を E_x とかくとき方程式

$$v(t,x;f) = E_x\Big[\exp\Big\{\int_0^t P(v(t-s,\beta_s;f))\,d\beta_s - \frac{1}{2}\int_0^t P^2(v(t-s,\beta_s;f))\,ds\Big\}\cdot f(\beta_t)\Big]$$

をみたすことがしられている。したがって

$$|v(t,x;f)| \leqq \|f\|$$

がなりたち、このことから $0 < t_0 < 1/B^2$ なる t_0 を固定して

$$v(t,x;f) = \begin{cases} E_{(x,0)}[\tilde{f}(Y(t))] & , 0 \leqq t \leqq t_0 \\ E_{(x,0)}[\widetilde{v(t_0,\cdot;f)}(Y(t-t_0))], & t_0 \leqq t \leqq 2t_0 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ E_{(x,0)}[v(kt_0,\cdot;f)(Y(t-kt_0))], & kt_0 \leqq t < (k+1)t_0, \\ \cdots\cdots\cdots & \end{cases}$$

とおくと $v(t,x;f)$ は (1) の大域解を与えることがわかる。勿論このようにして定めた $v(t,x;f)$ は $t_0 < 1/B^2$ のとり方には無関係に定まる。

最後に今述べた方法は多変数の場合にも殆んど変更なしに適用できることを注意しておく。

参考文献

[1] N. Ikeda, M. Nagasawa and S. Watanabe. Branching Markov processes II, Jour. of Math. of Kyoto Univ., vol. 8 pp. 365-410

[2] M. Nagasawa and T. Sirao: Probabilistic treatment of the blowing up of solutions for a nonlinear integral equation. Trans. A.M.S., vol. 139, pp 301-310.

[3] T. Sirao: On signed branching Markov processes with age. Nagoya Math. J., vol. 32, pp 155-225.